

1 Einfeldträger, Kragträger, Gelenkträger

1.1 Einfeldträger ($\alpha = a/l$, $\beta = b/l$)

		Auflagerkräfte		max M [an der Stelle x]	$EI f_{\text{Mitte}}$ ¹⁾
1		$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{8}$ [$x = l/2$]	$\frac{5}{384} ql^4$
2		$\frac{3}{8} ql$	$\frac{1}{8} ql$	$\frac{9}{128} ql^2$ [$x = 3/8 l$]	$\frac{5}{768} ql^4$
3		$\frac{qa}{l} \left(1 - \frac{a}{2}\right)$	$\frac{qa^2}{2l}$	$\frac{A^2}{2q}$ [$x = A/q$]	$\frac{1}{48} qa^2 l^3 (1,5 - x^2)$
4		$\frac{1}{2} qb$	$\frac{1}{2} qb$	$\frac{qb}{8} (2l - b)$ [$x = l/2$]	$\frac{1}{384} ql^4 (5 - 24x^2 + 16x^4)$
5		$\frac{qc(2b+c)}{2l}$	$\frac{qc(2a+c)}{2l}$	$\frac{A^2}{2q} + A \cdot a$ [$x = a + A/q$]	$\frac{1}{384} ql^4 (5 - 12x^2 + 8x^4 - 12\beta^2 + 8\beta^4)$
6		qa	qa	$\frac{1}{2} qa^2$ [$a \leq x \leq a+b$]	$\frac{q}{24} a^2 l^3 (1,5 - \alpha^2)$
7		$\frac{q_0}{2} (l - a)$	$\frac{q_0}{2} (l - a)$	$\frac{q_0}{24} (3l^2 - 4a^2)$ [$x = l/2$]	$\frac{1}{1920} q_0 l^4 (25 - 40\alpha^2 + 16\alpha^4)$
8		$\frac{(2q_1 + q_2) l}{6}$	$\frac{(q_1 + 2q_2) l}{6}$	$\approx 0,064 (q_1 + q_2) l^2$ [$x \approx 0,55 l$]	$\frac{5}{768} (q_1 + q_2) l^4$
9		$\frac{1}{6} q_0 l$	$\frac{1}{3} q_0 l$	$\frac{1}{9\sqrt{3}} q_0 l^2$ [$x = \frac{1}{\sqrt{3}} l$]	$\frac{5}{768} q_0 l^4$
10		$\frac{1}{4} q_0 l$	$\frac{1}{4} q_0 l$	$\frac{1}{12} q_0 l^2$ [$x = l/2$]	$\frac{1}{120} q_0 l^4$
11		$\frac{1}{4} q_0 l$	$\frac{1}{4} q_0 l$	$\frac{1}{24} q_0 l^2$ [$x = l/2$]	$\frac{3}{640} q_0 l^4$
12		$\frac{q_0 a}{6} (3 - 2\alpha)$	$\frac{q_0 a^2}{3l}$	$\frac{q_0 a^2}{3} \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\alpha\right)^3}$ [$x = a \sqrt{1 - \frac{2}{3}\alpha}$]	$EI f_1 = \frac{q_0 a^3}{45} (1 - \alpha)(5l - 4a)$
13		$\frac{q_0 a}{6} (3 - \alpha)$	$\frac{q_0 a^2}{6l}$	$\frac{q_0 a^2}{6l} \left(l - a + \frac{2}{3} a \sqrt{\frac{\alpha}{3}}\right)$	$EI f_1 = \frac{q_0 a^3}{360} (1 - \alpha)(20l - 13a)$

¹⁾ Bei symmetrischen Belastungen ist $f_{\text{Mitte}} = f_{\text{max}}$, bei unsymmetrischen Belastungen ist $f_{\text{Mitte}} \approx f_{\text{max}}$. Die Durchbiegungsformeln gelten nur für $EI = \text{const.}$ Enddrehwinkel τ siehe S. 4.26

²⁾ Unsymmetrische Belastung siehe S. 4.15 und 4.21

Einfeldträger (Fortsetzung)

		Auflagerkräfte		max M [an der Stelle x]	$EI f_{\text{Mitte}}$ ¹⁾
14		$\frac{q_0 l}{3}$	$\frac{q_0 l}{3}$	$\frac{5}{48} q_0 l^2$ [$x = l/2$]	$\frac{61}{5760} q_0 l^4$
15		$\frac{q_0 l}{2,4}$	$\frac{q_0 l}{4}$	$\frac{1}{11,15} q_0 l^2$ [$x = 0,446 l$]	$\frac{11}{1200} q_0 l^4$
16		$\frac{P}{2}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{Pl}{4}$ [$x = l/2$]	$\frac{1}{48} Pl^3$
17		$\frac{Pb}{l}$	$\frac{Pa}{l}$	$\frac{Pab}{l}$ [$x = a$]	$\frac{1}{48} Pl^3 (3\alpha - 4\alpha^3)$ für $a \leq b$
18		P	P	Pa [$a \leq x \leq a+b$]	$\frac{1}{24} Pl^3 (3\alpha - 4\alpha^3)$
19		$\frac{P(n-1)}{2}$	$\frac{P(n-1)}{2}$	$\frac{Pl}{r}$ max $M l^2 / s$	$\frac{Pl^3}{s}$
20		$\frac{Pn}{2}$	$\frac{Pn}{2}$	$\frac{Pl}{r}$ max $M l^2 / s$	$\frac{Pl^3}{s}$
21		$\frac{M}{l}$	$-\frac{M}{l}$	$a \geq l/2: \frac{Ma}{l}$ $a < l/2: -\frac{Mb}{l}$	
22		$\frac{M_2 - M_1}{l}$	$\frac{M_1 - M_2}{l}$	$\frac{1}{16} P(M_1 + M_2)$	
23		0	0	0	$\frac{l^2}{8} \cdot \frac{l^2 - l^2}{h} \propto EI$
24		$\max M = \frac{Pl}{8} \left(2 - \frac{c}{l}\right)^2$ für $x = \frac{l}{2} - \frac{c}{4}$ wenn $\frac{c}{l} > 0,586$, ist $\max M = \frac{Pl}{4}$			h Querschnittshöhe α Temperaturdehnzahl
25		$\max M = R \frac{(l-e)^2}{4l}$ für $x = \frac{l-e}{2}$ wenn $c \geq \frac{l}{2}$, kann $P_1 \frac{l}{4}$ maßgebend sein			

¹⁾ Siehe Fußnote ¹⁾, S. 4.2.

1.2 Einfeldträger mit Kragarm (die Formeln für f gelten nur bei $EI = \text{const}$)

		Auflagerkräfte A	B	max M_{Feld}	M_2	$EI f_{\text{Mitte}}$	$EI f_3$
1		$\frac{q}{2} \left(l - \frac{l_k}{2} \right)$	$\frac{q}{2} \left(l + \frac{l_k}{2} + 2l_k \right)$	$\frac{A^2}{2q}$	$-\frac{ql_k^2}{2}$	$\frac{ql^2}{32} \left(\frac{5}{12} l^2 - l_k \right)$	$\frac{ql_k}{24} (3l_k^2 + 4ll_k - l^2)$
2		$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{8}$	0	$\frac{5}{384} ql^4$	$-\frac{1}{24} ql^3 l_k$
3		$-\frac{ql_k^2}{2l}$	$ql_k \left(1 + \frac{l_k}{2l} \right)$	$-\frac{ql_k^2}{2}$	$-\frac{1}{32} ql^2 l_k$	$\frac{ql_k^3}{24} (4l + 3l_k)$	
4		$\frac{Pb}{l}$	$\frac{Pa}{l}$	$\frac{Pab}{l}$	0	$\frac{Pl^3}{48} (3x - 4x^2)$	$-\frac{Pabl_k}{6l} (l + a)$
5		$-\frac{Pa}{l}$	$\frac{P(a+l)}{l}$	$-Pa$	$-\frac{1}{16} (Pl^2 a)$	$\frac{1}{6} Pa(2ll_k + 3l_k a - a^2)$	

1.3 Eingespannte Kragträger (die Formeln für f und τ gelten nur bei $EI = \text{const}$)

		A	M^E	$EI f$	$EI \tau$
1		ql	$-\frac{ql^2}{2}$	$\frac{ql^4}{8}$	$-\frac{ql^3}{6}$
2		$\frac{q_0 l}{2}$	$-\frac{q_0 l^2}{6}$	$\frac{q_0 l^4}{30}$	$-\frac{q_0 l^3}{24}$
3		$\frac{q_0 l}{2}$	$-\frac{q_0 l^2}{3}$	$\frac{11q_0 l^4}{120}$	$-\frac{q_0 l^3}{8}$
4		P	$-Pl$	$\frac{Pl^3}{3}$	$-\frac{Pl^2}{2}$
5		0	M	$-\frac{Ml^2}{2}$	Ml

1.4 Eingespannte Einfeldträger ($EI = \text{const}$); vgl. auch S. 4.21 und 4.27

1		$A = \frac{3}{8} ql$ $B = \frac{5}{8} ql$	$M_2 = -\frac{ql^2}{8}$ $\max M_{\text{Feld}} = 9 \frac{ql^2}{128}$ bei $x = 0,375 l$	$\max f = \frac{2}{369} \cdot \frac{ql^4}{EI}$ bei $x = 0,4215 l$
2		$A = \frac{Pb^2}{2l^2} (a+2l)$ $B = P - A$	$M_2 = -\frac{Pab}{2l} \left(1 + \frac{a}{l} \right)$ $M_3 = \frac{Pab^2}{2l^2} (3a+2b)$	$f_3 = \frac{Pa^2 b^3}{12 EI l^2} \left(3 + \frac{a}{l} \right)$
3		$A = \frac{1}{10} ql$ $B = \frac{2}{5} ql$	$M_2 = -\frac{ql^2}{15}$ $\max M_{\text{Feld}} = \frac{ql^2}{33,54}$ bei $x = 0,447 l$	$\max f = \frac{ql^4}{419,3 EI}$ bei $x = 0,447 l$

Eingespannter Einfeldträger (Forts.) ($EI = \text{const}$); Einspannmomente s. S. 4.21 und 4.27

4		$A = \frac{11}{40} ql$ $B = \frac{9}{40} ql$	$\max M_{\text{Feld}} = \frac{ql^2}{23,6}$ bei $x = 0,329 l$	$\max f = \frac{ql^4}{328,1 EI}$ bei $x = 0,402 l$
5		$A = B = \frac{ql}{2}$	$\max M_{\text{Feld}} = \frac{ql^2}{24}$	$\max f = \frac{1}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI}$
6		$A = \frac{Pb^2}{l^2} (l+2a)$ $B = P - A$	$M_3 = 2P \frac{a^2 b^2}{l^3}$	$f_3 = \frac{Pa^2 b^3}{3 EI l^3}$
7		$A = \frac{3}{20} ql$ $B = \frac{7}{20} ql$	$\max M_{\text{Feld}} = \frac{ql^2}{46,6}$ bei $x = 0,548 l$	$\max f = \frac{ql^4}{764 EI}$ bei $x = 0,525 l$
8		$A = B = \frac{ql}{4}$	$\max M_{\text{Feld}} = \frac{ql^2}{32}$	$\max f = \frac{7}{3840} \frac{ql^4}{EI}$
9		$A = B = \frac{q}{2} (l-a)$	$\max M_{\text{Feld}} = \frac{ql^2}{24} \cdot (1-2x^2)$	$\max f = \frac{ql^4}{1920 EI} (5-20x^3+17x^4)$

1.5 Gelenkträger (Gerberträger)¹⁾ mit Streckenlast q

	$e = 0,1716 l$	$A = 0,414 ql$ $B = 1,172 ql$	$M_1 = 0,0858 \frac{ql^2}{l^2}$ $M_2 = 0,0858 \frac{ql^2}{l^2}$ $M_b = -0,0858 \frac{ql^2}{l^2}$	$f_1 = \frac{ql^4}{130 EI}$
	$e = 0,22 l$	$A = 0,414 ql$ $B = 1,086 ql$	$M_1 = 0,0858 \frac{ql^2}{l^2}$ $M_2 = 0,0392 \frac{ql^2}{l^2}$ $M_b = -0,0858 \frac{ql^2}{l^2}$	$f_1 = \frac{ql^4}{130 EI}$
	$e = 0,125 l$	$A = 0,438 ql$ $B = 1,063 ql$	$M_1 = 0,0957 \frac{ql^2}{l^2}$ $M_2 = 0,0625 \frac{ql^2}{l^2}$ $M_b = -0,0625 \frac{ql^2}{l^2}$	$f_1 = \frac{ql^4}{130 EI}$
	$e = 0,1716 l$	$A = 0,414 ql$ $B = 1,086 ql$	$M_1 = 0,0858 \frac{ql^2}{l^2}$ $M_2 = 0,0392 \frac{ql^2}{l^2}$ $M_b = -0,0858 \frac{ql^2}{l^2}$	$f_1 = \frac{ql^4}{130 EI}$
	$e_1 = 0,1465 l$ $e_2 = 0,1250 l$	$A = 0,438 ql$ $B = 1,063 ql$ $C = 1,000 ql$	$M_1 = 0,0957 \frac{ql^2}{l^2}$ $M_2 = 0,0625 \frac{ql^2}{l^2}$ $M_b = -0,0625 \frac{ql^2}{l^2}$	$f_1 = \frac{ql^4}{110 EI}$

	$e_1 = 0,1465 l$ $e_2 = 0,1250 l$	$A = 0,438 ql$ $B = 1,063 ql$ $C = ql$	$M_1 = 0,0957 \frac{ql^2}{l^2}$ $M_2 = -0,0625 \frac{ql^2}{l^2}$ $EI f_1 = 0,0091 \frac{ql^4}{l^4}$	

mehr als 5, gerade Felderzahl

beliebige Felderzahl

¹⁾ Die Formeln für die Durchbiegung f_i gelten nur für $EI = \text{const}$.

3 Geometrie

3.1 Flächenberechnung

	Quadrat $A = a^2$ $d = a \cdot \sqrt{2}$		Kreis $A = \pi \cdot d^2/4 = \pi \cdot r^2$ $U = \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$
	Rechteck $A = a \cdot b$ $d = \sqrt{a^2 + b^2}$		Kreisring $A = \pi \cdot (D^2 - d^2)/4$
	Parallelogramm $A = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin \alpha$ $d_1 = \sqrt{(a + h \cdot \cot \alpha)^2 + h^2}$ $d_2 = \sqrt{(a - h \cdot \cot \alpha)^2 + h^2}$		Kreisausschnitt $b = \pi \cdot r \cdot \alpha / 180^\circ$ $s = 2 \cdot r \cdot \sin(\alpha/2)$ $A = b \cdot r/2$ $x_s = (2 \cdot r \cdot s) / (3 \cdot b)$ $= (r^2 s) / (3 \cdot A)$
	Trapez $A = h \cdot (a + b)/2$ $x_s = \frac{1}{3} [a + b + c - b \cdot \frac{a-c}{a+b}]$ $y_s = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$		Kreisabschnitt $b = \pi \cdot r \cdot \alpha / 180^\circ$ $s = 2 r \sin \frac{\alpha}{2} \approx \sqrt{b^2 - \frac{16}{3} h^2}$ $h = 0,5 s \tan \frac{\alpha}{4} = 2 r \sin^2 \frac{\alpha}{4}$ $A = 0,5 r^2 (\pi \cdot \alpha / 180^\circ - \sin \alpha)$ $x_s = s^3 / (12 A)$
	Dreieck $A = a \cdot h/2$ $s = (a + b + c)/2$ $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $x_s = (a + e)/3$ $y_s = h/3$		Kreisringstück $A = \pi \cdot \alpha^\circ \cdot (R^2 - r^2) / 360^\circ$ $x_s = \frac{240}{\pi} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha^\circ}$
	Rechtwinkliges Dreieck¹⁾ $A = a \cdot b/2 = c \cdot h_c/2$		Ellipse $A = \pi \cdot a \cdot b$ $\lambda = (a - b)/(a + b)$ $U = \pi \cdot (a + b) \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{64} \lambda^4 + \frac{1}{256} \lambda^6 + \frac{25}{16384} \lambda^8 + \dots \right]$
	Gleichseitiges Dreieck $A = 0,25 a^2 \sqrt{3}$ $h = 0,5 a \sqrt{3}$; $U = 3 a$		Ellipsenabschnitt $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ $A = a \cdot b \cdot \arccos \frac{x}{a} - x \cdot y$ $x_s = \frac{2 \cdot a^2 \cdot y^3}{3 \cdot b^2 \cdot A}$
	Regelmäßiges Fünfeck: $A = 0,625 r^2 \sqrt{10+2\sqrt{5}}$ $a = 0,500 r \sqrt{10-2\sqrt{5}}$ $\rho = 0,250 r \sqrt{6+2\sqrt{5}}$		Parabel $y = h \cdot (x/a)^2$ $A_1 = 2 \cdot a \cdot h/3$; $A_2 = a \cdot h/3$ $x_{s1} = 3 \cdot a/8$; $x_{s2} = 3 \cdot a/4$ $y_{s1} = 3 \cdot h/5$; $y_{s2} = 3 \cdot h/10$ Bogenlänge: mit $H = 2 \cdot h/a$ $b = 0,5 \cdot [\sqrt{a^2 + 4h^2} + a \cdot \ln \sqrt{H + \sqrt{H^2 + 1}}/H]$
	Regelmäßiges Sechseck: $A = 1,5 a^2 \sqrt{3}$ $d = 2 a = 2 s / \sqrt{3}$ $s = 0,5 d \sqrt{3}$		kubische Parabel $y = h \cdot (x/a)^3$ $A_1 = 3 \cdot a \cdot h/4$; $A_2 = a \cdot h/4$ $x_{s1} = 2 \cdot a/5$; $x_{s2} = 4 \cdot a/5$ $y_{s1} = 4 \cdot h/7$; $y_{s2} = 2 \cdot h/7$
	Regelmäßiges Achteck $A = 2as = 2s \cdot \sqrt{d^2 - s^2}$ $a = s \cdot \tan 22,5^\circ$ $s = d \cdot \cos 22,5^\circ$ $d = s / \cos 22,5^\circ$		
	n-Eck (Pkt. "n + 1" = "1") Mit $H_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$ ist: $A = \sum H_i / 2$ $s_x = \sum H_i \cdot (y_i + y_{i+1}) / 6$ $s_y = \sum H_i \cdot (x_i + x_{i+1}) / 6$ (i = 1, ..., n) $x_s = s_y / A$; $y_s = s_x / A$		

¹⁾ Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$ Euklid: $a^2 = cp$; $b^2 = cq$ Höhensatz: $h_c^2 = pq$

3.2 Volumenberechnung

Es bedeuten: V Volumen; O Oberfläche; M Mantelfläche; G Grundfläche; D Deckfläche; A (h) Querschnittsfläche in der Höhe h ; h Höhe und u Umfang; s Mantellinie; r, R Radius; a, b, c Seiten

	Würfel $V = a^3$		Quader $V = abc$
	Prisma $V = G \cdot h$		Pyramide $V = \frac{1}{3} G \cdot h$
	Zylinder $V = G \cdot h$; $M = u \cdot s$		Pyramidenstumpf $V = \frac{h}{3} (G + \sqrt{G \cdot D} + D)$
	gerader Kreiszylinder $V = \pi r^2 h$; $M = 2 \pi r h$		Kegel $V = \frac{1}{3} G \cdot h$
	gerader Kreiskegel $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$; $M = \pi r s$		Kreiskegelstumpf $V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$
	Kugel $V = \frac{4}{3} \pi r^3$; $O = 4 \pi r^2$		Kugelabschnitt $V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)$ $M = 2 \pi r h$ $O = \pi h (4r - h)$ $\rho = \sqrt{h(2r - h)}$
	Kugelausschnitt $V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$ $O = \pi r (2h + \sqrt{h(2r - h)})$		Kugelschicht $V = \frac{1}{6} \pi h (3\rho_u^2 + 3\rho_o^2 + h^2)$ $M = 2 \pi r h$
	Rotationsparaboloid $V = \frac{1}{2} \pi r^2 h$		Ellipsoid $V = \frac{4}{3} \pi a b c$ (a, b, c Halbachsen)

11 Querschnittswerte

Querschnitt	A	I_y	I_z	W_y	W_z
	$b d$	$\frac{b d^3}{12}$	$\frac{d b^3}{12}$	$\frac{b d^2}{6}$	$\frac{d b^2}{6}$
	$2 B t_1 + t_2 h$	$\frac{1}{12} (B H^3 - b h^3)$	$\frac{1}{12} (h t_2^3 + t_1 2 B^3)$	$\frac{2 I_y}{H}$	$\frac{2 I_z}{B}$
	$\frac{b h}{2}$	$\frac{b h^3}{36}$	$\frac{h b^3}{36}$	$W_o = \frac{b h^2}{12}$ $W_u = \frac{b h^2}{24}$	$W_l = \frac{h b^2}{24}$ $W_r = \frac{h b^2}{12}$
	$\frac{b h}{2}$	$\frac{b h^3}{36}$	$\frac{h b^3}{48}$	$W_o = \frac{b h^2}{24}$ $W_u = \frac{b h^2}{12}$	$\frac{h b^2}{24}$
	$r^2 \pi$	$\frac{r^4 \pi}{4}$	$\frac{r^4 \pi}{4}$	$\frac{r^3 \pi}{4}$	$\frac{r^3 \pi}{4}$
	$\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$	$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{32} \frac{(D^4 - d^4)}{D}$	$\frac{\pi}{32} \frac{(D^4 - d^4)}{D}$
	$\frac{\pi r^2}{2}$	$r^4 (\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi})$	$\frac{r^4 \pi}{8}$	$W_o = 0,191 r^3$ $W_u = 0,259 r^3$	$0,393 r^3$
	$a t$	$\frac{a t}{12} (h^2 + t^2)$	$\frac{t a^3}{12}$	$\frac{I_y}{e_2}$	$\frac{I_z}{e_1}$
	$\frac{3 \sqrt{3} s^2}{2}$	$\frac{5 \sqrt{3} s^4}{16}$	$\frac{5 \sqrt{3} s^4}{16}$	$\frac{5 s^3}{8}$	$\frac{5 \sqrt{3} s^3}{16}$
	$\frac{\pi}{4} a b$	$\frac{\pi}{64} a b^3$	$\frac{\pi}{64} a^3 b$	$\frac{\pi}{32} a b^2$	$\frac{\pi}{32} a^2 b$
	$t(a+b-t)$	$\frac{t b^3 + (a-t) t^3}{12}$	$\frac{t a^3 + (b-t) t^3}{12}$	$\frac{2 I_y}{b}$	$\frac{2 I_z}{a}$
	$2,828 R^2$	$\frac{1+2\sqrt{2}}{6} R^4$	$\frac{1+2\sqrt{2}}{6} R^4$	$0,6906 R^3$	$0,6906 R^3$
	$BH - bh$	$\frac{1}{3} (t_1 H^3 + b t_2^3) - A e_2^2$	$\frac{1}{3} (h t_1^3 + t_2 B^3) - A e_1^2$	$W_o = \frac{I_y}{H - e_2}$ $W_u = \frac{I_y}{e_2}$	$W_r = \frac{I_z}{B - e_1}$ $W_l = \frac{I_z}{e_1}$
	$b d + b_0 d_1$	$\frac{1}{3} (2 b_1 d^3 + b_0 d_0^3) - A e_1^2$	$\frac{d b^3 + d_1 b_0^3}{12}$	$W_o = \frac{I_y}{e_1}$ $W_u = \frac{I_y}{e_2}$	$\frac{d b^3 + d_1 b_0^3}{6 b}$
	$t_2 a + 2 t_1 b_1$	$\frac{1}{3} [a e_1^3 - a_1 (e_1 - t_2)^3 + 2 e_2^3 t_1]$	$\frac{b a^3 - b_1 a_1^3}{12}$	$W_o = \frac{I_y}{e_2}$ $W_u = \frac{I_y}{e_1}$	$\frac{b a^3 - b_1 a_1^3}{6 a}$

○ Schwerpunkt + Schubmittelpunkt ⊕ Schwerpunkt und Schubmittelpunkt

I_{yz}	I_T	W_T	e_m	Anmerkungen
1	0	$\alpha \cdot b^3 \cdot d$ für $b \leq d$	0	zu Zeile 1 d/b α β 1,00 0,140 0,208 1,25 0,171 0,221 1,50 0,196 0,231 2,00 0,229 0,246 3,00 0,263 0,267 4,00 0,281 0,282 6,00 0,299 0,299 10,00 0,313 0,313 ∞ 0,333 0,333
2	0	$\frac{1}{3} (2 B t_1^3 + h t_2^3)$	0	zu Zeile 3
3	$-\frac{h^2 b^2}{72}$	—	—	$I_{yz} = + \frac{h^2 b^2}{72}$
4	0	$\frac{h^4}{26}$	$\frac{h^3}{13}$	zu Zeile 4 Die Formeln auf S. 4.30 gelten auch für
5	0	$\frac{\pi D^4}{32}$	$\frac{\pi D^3}{16}$	0
6	0	$\pi r_m^2 (D-d)$	$\pi r_m^2 (D-d)$	0
7	0	—	—	zu Zeile 7 $e_u = \frac{4}{3} r$ $e_o = r - e_u$
8	$\frac{a^2 h t}{12}$	$\frac{a t^3}{3}$ $t \ll a$	$\frac{I_T}{t}$ $t \ll a$	zu Zeile 8 $e_1 = \frac{a}{2}$ $e_2 = \frac{h+t}{2}$
9	0	$0,133 D^4$	$0,188 D^3$	0
10	0	$\frac{\pi}{16} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$	$\frac{\pi}{16} a b^2$	0
11	0	$\frac{t^3}{3} (a+b-0,15 t)$	$\frac{I_T}{t}$	zu Zeile 13 $e_1 = \frac{t^2 B^2 + h t_1^2}{2 A}$ $e_2 = \frac{t_1 H^2 + b t_2^2}{2 A}$
12	0	$0,130 D^4$	$0,185 D^3$	0
13	$t_1 H (e_1 - \frac{t_1}{2}) (e_2 - \frac{H}{2}) + b t_2 (e_2 - \frac{t_2}{2}) (e_1 - \frac{b}{2})$ Vereinfachung wenn $t_1 = t_2 = t$: $\frac{-H h b t}{4 (B+h)}$	$\frac{1}{3} (H t_1^3 + b t_2^3)$	$\min W_T = \frac{I_T}{\max t}$	$e_{m1} = \frac{t_1}{2}$ $e_{m2} = \frac{t_2}{2}$ Hinweis: für das Vorzeichen von I_{yz} bei verschiedenen Lagen der Winkelfläche:
14	0	$\frac{1}{3} (b t_2^3 + d_1 t_1^3)$ für $b_0 = t_1$ und $d = t_2$	$\min W_T = \frac{I_T}{\max t}$	$e_m = \frac{d}{2}$ zu Zeile 14 $e_1 = \frac{2 b_1 d^2 + b_0 d_0^2}{2 A}$ $e_2 = d_0 - e_1$
15	0	$\frac{1}{3} (2 b t_1^3 + a_1 t_2^3)$	$\min W_T = \frac{I_T}{\max t}$	zu Zeile 15 $e_1 = \frac{a_1 t_2^2 + 2 b^2 t_1}{2 a_1 t_2 + 4 b t_1}$ $e_2 = b - e_1$

Graue Unterlegung: Gültig nur für dünnwandige Querschnitte

1. Fußzeiger: Orientierung der Bezugsfläche (Richtung der Flächennormalen)
2. Fußzeiger: Richtung der Schubspannung τ

12.1.2 Unsymmetrische Querschnitte

Die Hauptachsen gehen durch den Schwerpunkt und sind gegenüber den Schwerpunktsachsen y und z um den Winkel α gedreht (vgl. S. 4.32).

Normalspannungen:
$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot \zeta - \frac{M_z}{I_z} \cdot \eta \quad (1)$$

Koordinaten eines Punktes i im Hauptachsensystem η, ζ :

$$\eta_i = y_i \cdot \cos \alpha + z_i \cdot \sin \alpha \quad \zeta_i = -y_i \cdot \sin \alpha + z_i \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

Momentenvektoren M_η und M_ζ :

$$M_\eta = M_y \cdot \cos \alpha + M_z \cdot \sin \alpha \quad M_\zeta = -M_y \cdot \sin \alpha + M_z \cdot \cos \alpha \quad (3)$$

Gleichung der Spannungsnulllinie und Winkel β zwischen η -Achse

und Nulllinie:
$$\zeta = \frac{M_\zeta \cdot I_\eta}{M_\eta \cdot I_\zeta} \eta - \frac{N \cdot I_\eta}{M_\eta \cdot A} ; \tan \beta = \frac{M_\zeta \cdot I_\eta}{M_\eta \cdot I_\zeta} \quad (4)$$

Schubspannungen: Siehe [4.4]

Beispiel:

Geg.: $L 150 \times 100 \times 10$; $N = 0$; $M_y = 375 \text{ kNm}$; $M_z = -200 \text{ kNm}$ ¹⁾
Aus Tafeln Abschnitt 8 : $\alpha = 23,85^\circ$; $I_y = 637 \text{ cm}^4$; $I_z = 112 \text{ cm}^4$

Ges.: Spannungen in den Eckpunkten des Winkels

Aus Gl. (2): $\eta_1 = 2,34 \cdot \cos 23,85^\circ - 10,2 \cdot \sin 23,85^\circ = -1,98 \text{ cm}$
 $\zeta_1 = -2,34 \cdot \sin 23,85^\circ - 10,2 \cdot \cos 23,85^\circ = -10,28 \text{ cm}$
 $\eta_2 = 2,34 \cdot \cos 23,85^\circ + 4,8 \cdot \sin 23,85^\circ = 4,08 \text{ cm}$
 $\zeta_2 = -2,34 \cdot \sin 23,85^\circ + 4,8 \cdot \cos 23,85^\circ = 3,44 \text{ cm}$
 $\eta_3 = -7,66 \cdot \cos 23,85^\circ + 4,8 \cdot \sin 23,85^\circ = -5,07 \text{ cm}$
 $\zeta_3 = 7,66 \cdot \sin 23,85^\circ + 4,8 \cdot \cos 23,85^\circ = 7,49 \text{ cm}$

Aus Gl. (3): $M_\eta = 375 \cdot \cos 23,85^\circ - 200 \cdot \sin 23,85^\circ = 262,1 \text{ kNm}$
 $M_\zeta = -375 \cdot \sin 23,85^\circ - 200 \cdot \cos 23,85^\circ = -334,6 \text{ kNm}$

Aus Gl. (1): $\sigma_1 = \frac{262,1}{637} (-10,28) - \frac{-334,6}{112} (-1,98) = -10,2 = -102 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_2 = \frac{262,1}{637} 3,44 - \frac{-334,6}{112} 4,08 = 13,6 \text{ kN/cm}^2 = 136 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_3 = \frac{262,1}{637} 7,49 - \frac{-334,6}{112} (-5,07) = -12,1 \text{ kN/cm}^2 = -121 \text{ N/mm}^2$

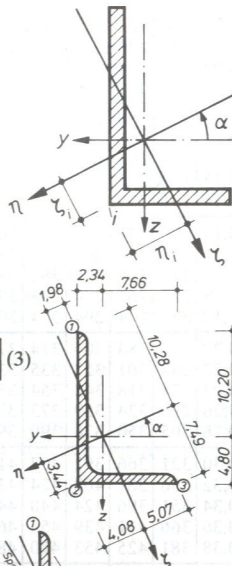
Aus Gl. (4): $\tan \beta = (-334,6/262,1) \cdot (637/112) = -7,26$; $\beta = -82,2^\circ$

Ermittlung der Spannungen ohne Bestimmung der Hauptachsen [4.9]

$$\sigma_i = \frac{M_y \cdot I_z + M_z \cdot I_{yz}}{I^*} z_i - \frac{M_z \cdot I_y + M_y \cdot I_{yz}}{I^*} y_i \quad \tan \gamma = \frac{M_z \cdot I_y + M_y \cdot I_{yz}}{M_y \cdot I_z + M_z \cdot I_{yz}}$$

$$I_{yz} = \pm \sqrt{I_y \cdot I_z - I_\eta \cdot I_\zeta} ; I^* = I_y \cdot I_z - I_{yz}^2 = I_\eta \cdot I_\zeta$$

¹⁾ Ein Nachweis auf Torsion kann entfallen ($M_T = 0$), wenn eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt ist: a) Die Lasten gehen durch den Schubmittelpunkt (s. Tafel 4.30/4.31)
b) Eine Verdrehung der Querschnitte wird durch konstruktive Maßnahmen verhindert.



Beispiel (wie auf S. 4.34). Geg.: $L 150 \times 100 \times 10$

$$M_y = 375 \text{ kNm}; M_z = -200 \text{ kNm}; I_y = 552 \text{ cm}^4; I_z = 198 \text{ cm}^4; I_\eta = 637 \text{ cm}^4; I_\zeta = 112 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz} = -\sqrt{552 \cdot 198 - 637 \cdot 112} = -194,8 \text{ cm}^4; I^* = 637 \cdot 112 = 71344 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_1 = \frac{375 \cdot 198 + 200 \cdot 194,8}{71344} z_i - \frac{-200 \cdot 552 + 375 \cdot (-194,8)}{71344} y_i; \sigma_1 = 1,587 z_i + 2,571 y_i$$

$$\sigma_1 = -1,587 \cdot 10,2 + 2,571 \cdot 2,34 = -10,2 \text{ kN/cm}^2; \sigma_2 = 1,587 \cdot 4,8 + 2,571 \cdot 2,34 = 13,6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_3 = 1,587 \cdot 4,8 - 2,571 \cdot 7,66 = -12,1 \text{ kN/cm}^2; \tan \gamma = -1,62; \gamma = -58,32^\circ$$

Damit ergibt sich der Winkel β (vgl. S. 4.34 unten) zu $\beta = -58,32 - 23,85 = -82,17^\circ$

12.2 Kern

Liegt der Lastangriffspunkt der resultierenden Längskraft im Kern des Querschnitts, so treten nur Spannungen eines Vorzeichens auf Kernweiten:

allgemein	Rechteck	Kreis
$k_{y1} = \frac{I_z}{y_2} \cdot \frac{1}{A}; k_{z1} = \frac{I_y}{z_2} \cdot \frac{1}{A}$ $k_{y2} = \frac{I_z}{y_1} \cdot \frac{1}{A}; k_{z2} = \frac{I_y}{z_1} \cdot \frac{1}{A}$		

12.3 Randspannungen bei rechteckigen Querschnitten

(Zugspannungen können nicht aufgenommen werden)

Kantenpressungen bei einachsiger Ausmittigkeit

Belastungs- und Spannungsschema	Lage der resultierenden Kraft	Randspannungen
	$e = 0$ (R in der Mitte)	$\sigma = \frac{R}{bd}$
	$e < \frac{d}{6}$ (R innerhalb des Kerns)	$\sigma_1 = \frac{R}{bd} \left(1 - \frac{6e}{d}\right)$ $\sigma_2 = \frac{R}{bd} \left(1 + \frac{6e}{d}\right)$
	$e = \frac{d}{6}$ (R auf dem Kernrand)	$\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 = \frac{2R}{bd}$
	$\frac{d}{6} < e < \frac{d}{3}$ (R außerhalb des Kerns)	$\sigma = \frac{2R}{3cb}$ $c = d/2 - e$
	$e = \frac{d}{3}$	$\sigma = \frac{4R}{bd}$